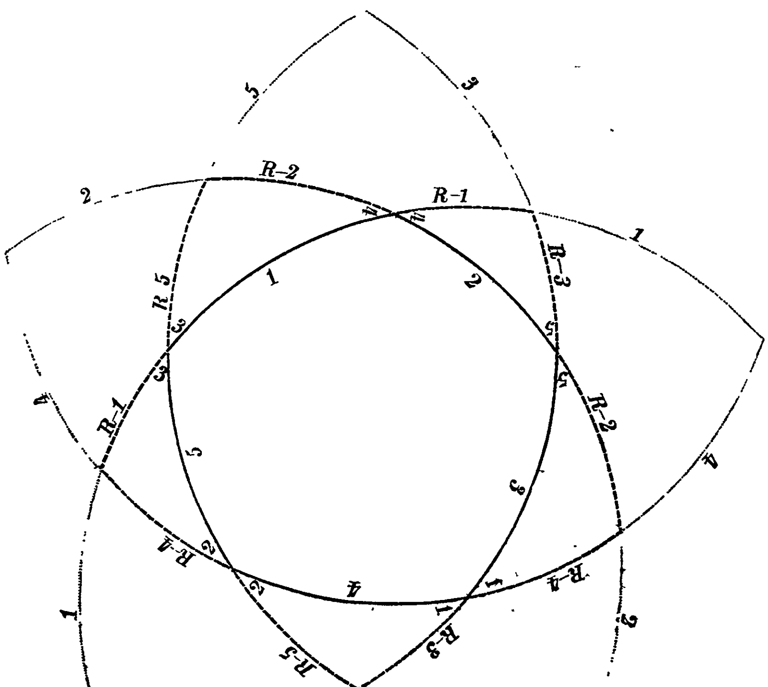
PENTAGRAMMA MIRIFICUM.



[1.]

$$\cos 1 = \sin 2 . \sin 5$$
$$\cos 2 = \sin 3 . \sin 1$$
$$\cos 3 = \sin 4 . \sin 2$$
$$\cos 4 = \sin 5 . \sin 3$$
$$\cos 5 = \sin 1 . \sin 4$$

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 1 . \operatorname{tang} 3 . \operatorname{tang} 4 \\ &= \cos 2 . \operatorname{tang} 4 . \operatorname{tang} 5 \\ &= \cos 3 . \operatorname{tang} 5 . \operatorname{tang} 1 \\ &= \cos 4 . \operatorname{tang} 1 . \operatorname{tang} 2 \\ &= \cos 5 . \operatorname{tang} 2 . \operatorname{tang} 3 \end{aligned}$$

8. $$-d1 = d2 . \cos 4 + d5 . \cos 3$$
9. $$-d2 = d3 . \cos 5 + d1 . \cos 4$$
10. $$-d3 = d4 . \cos 1 + d2 . \cos 5$$
11. $$-d4 = d5 . \cos 2 + d3 . \cos 1$$
12. $$-d5 = d1 . \cos 3 + d4 . \cos 2$$

Die Elimination von d5 aus 8 und 12 gibt

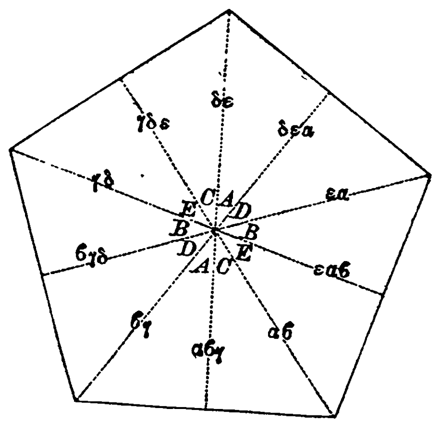
$$d1 . \sin 3^2 = -d2 . \cos 4 + d4 . \cos 2 . \cos 3$$

Die Elimination von d3 aus 9 und 10 hingegen

$$d2 . \sin 5^2 = -d1 . \cos 4 + d4 . \cos 1 . \cos 5$$

[2.]

Das ebne Fünfeck, welches die Centralprojection jenes sphaerischen auf eine beliebige Ebne bildet, hat die Eigenschaft, dass die von den einzelnen Winkelpunkten zur gegenüberstehenden Seite gezogenen Normalen sich in Einem Punkte schneiden (im Augenpunkte). Zugleich sind die Producte der beiden Stücke, in welche jener gemeinschaftliche Durchschnittspunkt jede Normale theilt, für alle gleich.



$$\cos A = \alpha, \quad \cos B = \beta, \quad \cos C = \gamma, \quad \cos D = \delta, \quad \cos E = \varepsilon$$

Um die Eckpunkte in ganzen complexen Zahlen ausgedrückt zu erhalten, seien p, p', p'', p''', p'''' fünf complexe ganze Zahlen, und zwar

$$p = a+bi, \quad p' = a'+b'i, \quad \text{etc.}$$

Man setze

$$a'a'''+b'b''' = (1,3), \quad a''a''''+b''b'''' = (2,4) \quad \text{u. s. w.}$$

und nehme für die Eckpunkte

$$\begin{array}{cccccc} & (1,3)(2,4)p, & (2,4)(3,0)p', & (3,0)(4,1)p'', & (4,1)(0,2)p''', & (0,2)(1,3)p'''' \\ = & q, & q', & q'', & q''', & q'''' \end{array}$$

also

$$q = (a'a'''+b'b''')(a''a''''+b''b'''')a+(a'a'''+b'b''')(a''a''''+b''b'''')bi$$
u. s. f.

Es ist dann

$$q'-q = (ba'-ab')(2,4)(b'''-a'''i) = -(ba'-ab')(2,4)p'''i$$
u. s. f.

Der Schnitt von qq' mit oq''' hat die complexe Zahl $=$

$$Q''' = \frac{(1,3)(2,4)(3,0)}{a'''a'''+b'''b'''}p''' \text{ u. s. w.}$$

Das oben erwähnte Product wird

$$\begin{aligned} &= -(0,2)(1,3)(2,4)(3,0)(4,1) \\ Q'''-q &= \frac{(1,3)(2,4)(ba'''-ab''')}{a'''a'''+b'''b'''}(b'''-a'''i) \\ q'-Q''' &= \frac{(2,4)(3,0)(a'b'''-b'a''')}{a'''a'''+b'''b'''}(b'''-a'''i) \end{aligned}$$

[3.]

Die Relationen zwischen den Seiten des sphärischen Fünfecks so

Tangenten	Quadrate der Secanten	Cosecanten	Gleichungen
α	$\gamma\delta$	$\frac{\gamma\delta}{\alpha}$	$1+\alpha=\gamma\delta$
β	$\delta\varepsilon$	$\frac{\delta\varepsilon}{\beta}$	$1+\beta=\delta\varepsilon$
γ	$\varepsilon\alpha$	$\frac{\varepsilon\alpha}{\gamma}$	$1+\gamma=\varepsilon\alpha$
δ	$\alpha\beta$	$\frac{\alpha\beta}{\delta}$	$1+\delta=\alpha\beta$
ε	$\beta\gamma$	$\frac{\beta\gamma}{\varepsilon}$	$1+\varepsilon=\beta\gamma$

Diese Gleichungen sind nicht unabhängig, es ist nemlich identisch:

$$\begin{aligned}(1+\gamma)(1+\beta-\delta\varepsilon)-(1+\beta)(1+\gamma-\varepsilon\alpha) &= \varepsilon\{(1+\beta)\alpha-(1+\gamma)\delta\} \\ &= \varepsilon\{(\alpha\beta-\delta-1)-(\gamma\delta-\alpha-1)\}\end{aligned}$$

und auf ähnliche Weise wird die fünfte aus dreien der übrigen abgeleitet.

Aus zweien der Grössen α, β, γ, δ, ε folgen die übrigen

$$\begin{array}{llll} \beta = \frac{1+\alpha+\gamma}{\alpha\gamma}, & \beta = \frac{1+\delta}{\alpha}, & \gamma = \frac{1+\alpha}{\alpha\beta-1}, & \beta = \frac{1+\varepsilon}{\alpha\varepsilon-1} \\ \delta = \frac{1+\alpha}{\gamma}, & \gamma = \frac{1+\alpha}{\delta}, & \delta = \alpha\beta-1, & \gamma = \alpha\varepsilon-1 \\ \varepsilon = \frac{1+\gamma}{\alpha}, & \varepsilon = \frac{1+\alpha+\delta}{\alpha\delta}, & \varepsilon = \frac{1+\beta}{\alpha\beta-1}, & \delta = \frac{1+\alpha}{\alpha\varepsilon-1} \end{array}$$

Beispiel

	$\cos^2$	$\sin^2$			
$\alpha = 9$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	71^0	$33'$	$56''$
$\beta = \frac{3}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	39	13	54
$\gamma = 2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	54	44	7
$\delta = 5$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	65	54	19
$\varepsilon = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	30	0	0

Schöne Gleichung

$$3+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = \sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\varepsilon)}$$

Der Inhalt des sphärischen Pentagons ist 360^0 weniger Summe der Seiten. Setzt man die Summe $= S$ und

$$(1+i\sqrt{\alpha})(1+i\sqrt{\beta})(1+i\sqrt{\gamma})(1+i\sqrt{\delta})(1+i\sqrt{\varepsilon}) = A+Bi$$

so wird:

$$A = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon . \cos S$$
$$B = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon . \sin S$$

[4.]

$$G(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2+G'(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z)^2+G''(\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z)^2$$
$$= Axx+Byy+Czz+2ayz+2bxz+2cxy$$

$$\begin{aligned}(A-G)\alpha+ \quad c\beta+ \quad b\gamma &= 0\\ c\alpha+(B-G)\beta+ \quad a\gamma &= 0\\ b\alpha+ \quad a\beta+(C-G)\gamma &= 0\end{aligned}$$

$$\{a(A-G)-bc\}\alpha = \{b(B-G)-ac\}\beta = \{c(C-G)-ab\}\gamma$$

$$\frac{bc}{a(A-G)-bc}+\frac{ac}{b(B-G)-ac}+\frac{ab}{c(C-G)-ab}+1 = 0$$

$$(A-G)(B-G)(C-G)+2abc = aa(A-G)+bb(B-G)+cc(C-G)$$

$$\alpha\alpha = \frac{1}{1+\left(\frac{a(A-G)-bc}{b(B-G)-ac}\right)^2+\left(\frac{a(A-G)-bc}{c(C-G)-ab}\right)^2}$$

Setzt man

$$\frac{bc}{a(A-x)-bc}+\frac{ac}{b(B-x)-ac}+\frac{ab}{c(C-x)-ab}+1=\Omega$$

so wird indefinite

$$\{a(A-x)-bc\}\{b(B-x)-ac\}\{c(C-x)-ab\}\Omega$$
$$=-abc(x-G)(x-G')(x-G'')$$

Differentiirt man und setzt nach der Differentiation $x=G$, so wird

$$\{a(A-G)-bc\}\{b(B-G)-ac\}\{c(C-G)-ab\}$$
$$\times abc\left\{\frac{1}{(a(A-G)-bc)^2}+\frac{1}{(b(B-G)-ac)^2}+\frac{1}{(c(C-G)-ab)^2}\right\}$$
$$=abc(G-G')(G-G'')$$

woraus

$$\alpha=\sqrt{\frac{[b(B-G)-ac][c(C-G)-ab]}{[a(A-G)-bc](G-G')(G-G'')}}$$

Die Schlüsse bedürfen einer Abänderung, wenn eine der Grössen a, b, c verschwindet. Die obige erste Gleichung für G wäre dann eine identische.

[5.]

Gleichung der Punkte der Kegelfläche, in welcher die Punkte (1) (2) (3) (4) (5) liegen, Spitze des Kegels im Mittelpunkt der Kugel zugleich Anfangspunkt der Coordinaten. Achse der x geht durch den Punkt (3), also Ebene der yz geht durch (1) und (5), Achse der y geht durch (1)

	x	y	z
(3)	1	0	0
(4)	cos 1	0	sin 1
(5)	0	cos 3	sin 3
(1)	0	1	0
(2)	cos 5	cos 4	—cos 3 . sin 5

Gleichung

$$(z.\cos 1-x.\sin 1)(z.\cos 3-y.\sin 3)\cos 2=xy$$

oder

$$zz = xz\sqrt{\alpha} + yz\sqrt{\gamma} + \tfrac{1+\alpha+\gamma}{\sqrt{\alpha\gamma}}\,xy$$

Durch Veränderung der Coordinatenflächen lässt sich dieselbe in die Form bringen

$$z'z' = Lx'x' + My'y'$$

Löst man die Gleichung auf

$$t(2t-1)^2 = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon(t-1)$$

welche eine negative (G) und zwei positive Wurzeln (G', G'') hat, so wird

$$Gz'z' + G'x'x' + G''y'y' = 0$$

$$GG'G'' = -\tfrac{1}{4}\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$$

$$(G-1)(G'-1)(G''-1) = -\tfrac{1}{4}$$

$$(2G-1)(2G'-1)(2G''-1) = -\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$$

Für obiges Beispiel

$$t(2t-1)^2 = 20(t-1)$$

Wurzeln $\quad -2{,}1973145, \quad +1{,}06931815, \quad +2{,}1279965$

Setzt man

$$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = \omega \quad \text{und} \quad \sqrt{\tfrac{(18\omega+1)^2}{(3\omega+1)^2}} = \cos 3\psi$$

so wird

$$t = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}\cos\psi . \sqrt{(3\omega+1)}$$

Das Verhalten der cubischen Gleichung

$$\frac{t(2t-1)^2}{t-1} = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$$

(welche man am bequemsten mit WEIDENBACH's Tafel auflöst, wo für $\frac{1-x}{1+x} = y$ gesucht werden muss $\frac{1}{yxx} = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, wonach dann $2t-1 = \frac{1}{x}$ wird) übersieht man durch folgende Tafel

t	$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$	t	$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$	t	$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$
∞	∞	$+1.9$	$+16.6$	$+1.0$	∞
$+10$	$+400.9$	$+1.8$	$+15.2$	. . . . .	negativ
$+9$	$+325.1$	$+1.7$	$+14.0$	-1.0	∞
$+8$	$+257.1$	$+1.6$	$+12.9$	-1.618034	$+11.0901699$
$+7$	$+197.2$	$+1.5$	$+12.0$	-2	$+16.7$
$+6$	$+145.2$	$+1.4$	$+11.34$	-3	$+36.7$
$+5$	$+101.2$	$+1.309017$	$+11.0901699$	-4	$+64.8$
$+4$	$+65.3$	$+1.3$	$+11.09$	-5	$+100.8$
$+3$	$+37.5$	$+1.2$	$+11.76$	$-\infty$	∞
$+2$	$+18$	$+1.1$	$+15.84$		

Damit also drei reelle Wurzeln Statt finden, muss $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \overline{\gtrless} 11.0901699$ oder $\frac{11}{2}+\frac{\sqrt{125}}{2}$ sein, die Grenzwerthe für t sind also: $+1.309017 = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$ und $-1.618034 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

[6].

A, B, C, D, E die Winkelpunkte des Polygons

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ Pole der Diagonalen

0, 1, 2 die drei Hauptachsen entsprechend den Wurzeln G, G', G'' der Gleichung

$$\frac{t(2t-1)^2}{t-1} = (\operatorname{tang} AB \,.\, \operatorname{tang} BC \,.\, \operatorname{tang} CD \,.\, \operatorname{tang} DE \,.\, \operatorname{tang} EA)^2$$

wo für G die negative Wurzel genommen werden mag; so dass

$$Guu + + G'u'u' + G''u''u'' = 0$$

wenn u die Coordinaten irgend eines der Punkte A, B, C, D, E bedeuten, also zugleich $uu + u'u' + u''u'' = 1$.

Die Quelle der Hauptsätze ist in den zwei Gleichungen enthalten

$$\text{I.} \qquad \cos 0A \,.\, \cos 0b = -\frac{\operatorname{tang} EA \,.\, (2G - 1 - \operatorname{tang} AB^2)}{4(G-G')(G-G'')}$$

$$\text{II.} \qquad \cos 0A \,.\, \cos 0C = -\frac{2G - 1 - \frac{1}{\sin DE^2}}{4\cos BC \,.\, \cos AB(G-G')(G-G'')}$$

Die Gleichung I. repräsentirt 30 Gleichungen, die II. hingegen 15 da alle Permutationen der Achsen und der Winkelpunkte erlaubt sind. Noch zierlicher (in den anfänglichen Bezeichnungen, wo $\alpha = \operatorname{tang} CD^2$ u. s. w.)

$$\text{I.} \quad \begin{cases} \cos 0C . \cos 0\,\mathrm{d} = \frac{1+\alpha-2G}{4(G'-G)(G''-G)} . \sqrt{\varepsilon} = \mathfrak{A} . \sqrt{\varepsilon} \\ \cos 0D . \cos 0c = \frac{1+\alpha-2G}{4(G'-G)(G''-G)} . \sqrt{\beta} = \mathfrak{A} . \sqrt{\beta} \end{cases}$$

$$\text{II.} \quad \cos 0B . \cos 0E = \frac{2\alpha+1-2\alpha G}{4(G'-G)(G''-G)} . \sqrt{\beta\varepsilon} = \mathfrak{a} . \sqrt{\beta\varepsilon}$$

Die zehn Gleichungen I. können nur für neun gelten, weil die Multiplication von fünfen dasselbe Resultat gibt wie die Multiplication der fünf übrigen. Es muss also zwischen den 10 Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}$ etc. vier Bedingungsgleichungen geben, welche am zierlichsten so dargestellt werden

$$\beta\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{C} = \varepsilon\mathfrak{e}\mathfrak{d}\mathfrak{D}, \qquad \gamma\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{D} = \alpha\mathfrak{a}\mathfrak{e}\mathfrak{C} \text{ u. s. w. oder auch}$$
$$\beta\mathfrak{a}\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \gamma\mathfrak{d}\mathfrak{B}\mathfrak{D}, \qquad \gamma\mathfrak{b}\mathfrak{B}\mathfrak{D} = \delta\mathfrak{e}\mathfrak{C}\mathfrak{C} \text{ u. s. w.}$$

Es ist aber

$$\cos 0A^2 = \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}\mathfrak{d}} . \alpha = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{b}\gamma}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{c}\delta}{\mathfrak{B}} \text{ u. s. w.,} \qquad \cos 0a^2 = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{\mathfrak{a}} \text{ u. s. w.}$$

[7.]

1843. April 20. Die excentrischen Anomalien $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''', \varphi''''$ der Punkte A, B, C, D, E sind durch die Gleichungen verbunden (G als negativ betrachtet)

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi'''+\varphi'')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi'''-\varphi'')} = \frac{G}{G''} . \sin\varphi, \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi'''+\varphi'')}{\operatorname{cso}\frac{1}{2}(\varphi'''-\varphi'')} = \frac{G}{G''} . \cos\varphi$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi'''')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi'''')} = \sqrt{\frac{G(G-1)}{G''(G''-1)}} . \sin\varphi = \frac{G(2G-1}{G''(2G''-1)} \sin\varphi$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi'''')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi'''')} = \sqrt{\frac{G(G-1)}{G'(G'-1)}} . \cos\varphi = \frac{G(2G-1)}{G'(2G'-1)} \cos\varphi$$

Die Relationen zwischen den Winkeln $\varphi^0, \varphi', \varphi''$ sind am einfachsten auf folgende Art darzustellen, $\sqrt{\frac{G'}{G'-1}} = \xi$, $\sqrt{\frac{G''}{G''-1}} = \eta$ gesetzt, wird $\xi\eta =$

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi'''')}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi'''-\varphi'')} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi''-\varphi^0)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi''''-\varphi''')} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi'''-\varphi')}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi^0-\varphi'''')} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi''''-\varphi'')}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi^0)} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi^0-\varphi''')}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi''-\varphi')}$$

für $\frac{\xi\eta+1}{\xi\eta-1}$ gibt es einen ähnlichen Ausdruck, der sich hieraus leicht ableiten lässt.

In Zahlen

											log tang	log tang	$\log\Delta$
$\varphi^0 =$	50^0	$29'$	$20''$	80^0	$54'$	$55''$	49^0	$13'$	$4''$	0.79616	0.06418	9.81007
$\varphi' =$	92	56	38	55	49	27	15	16	12.5	0.16814	9.43617	9.182
$\varphi'' =$	162	8	14	83	48	52	59	41	16.5	0.96505	0.23313	9.97901
$\varphi''' =$	260	34	22	64	29	16.5	21	13	39	0.32127	9.58931	9.33515
$\varphi'''' =$	291	6	47	74	57	29	34	35	48	0.57068	9.83871	9.

$0.73196 = \log \xi\eta$

[8.]

Die $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''', \varphi''''$ sind nichts anders als die Amplituden zu fünf transscendenten Argumenten, welche um $\frac{4}{5}K$ zunehmen (in der Bedeutung von JACOBI p. 31) und wo der Modulus k

$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{G'G'} - \frac{1}{G''G''}}{\frac{1}{G'G'} - \frac{1}{GG}}} = \sin\mu, \quad \cos\mu = \sqrt{\frac{\frac{1}{G''G''} - \frac{1}{GG}}{\frac{1}{G'G'} - \frac{1}{GG}}}$$

Das transcendente Argument selbst, unbestimmt genommen, ist

$$= \int \frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{(xx+yy)}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{G'G'} - \frac{1}{GG}}{\left(\frac{1}{G'G'} - \frac{1}{GG}\right)xx + \left(\frac{1}{G''G''} - \frac{1}{GG}\right)yy}}$$

Δ in der Bezeichnung von JACOBI gebraucht so dass $\Delta\varphi = \sqrt{(1 - hk\sin\varphi^2)}$, es sind

die drei Grössen	ebenso		propositional den Zahlen	oder
$\tan\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi'''')$	$\tan\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi^0)$	u. s. w.	$G(2G-1)\sqrt{\left(\frac{1}{G'G'} - \frac{1}{GG}\right)}$	tang am $\frac{4}{5}K$
$\tan\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi'')$	$\tan\frac{1}{2}(\varphi'''' - \varphi''')$		$-G\sqrt{\left(\frac{1}{G'G'} - \frac{1}{GG}\right)}$	tang am $\frac{2}{5}K$
$\Delta\varphi^0$	$\Delta\varphi'$		1	1